P97

2-2 直線方程式的應用

學過直線方程式後，我們可以解聯立方程式，求出平面上點對直線的投影點與對稱點，並建立點線距公式，還可以求三角形的重心、內心、外心、垂心。本單元的後半段還要介紹二元一次不等式的解，在平面上所成的圖形為半平面，要學習的題型相當豐富。

國中複習銜接

國三上：重心、內心與外心

\* 重心為三角形三中線的交點，必在三角形內部，把中線長分成 2：1 的比例，且三中線把三角形分割成六個等面積的小三角形。記為 G

\* 內心為三角形三條內角平分線的交點，為內切圓的圓心，到三邊等距，必在三角形的內部。記為 I

\* 外心為三角形三邊中垂線的交點，為外接圓的圓心，到三頂點等距。記為 O。直角三角形的外心恰在斜邊中點。

1. 如右圖，△ABC 中， ，，是的中垂線，若 I 點為內心，G 點為重心，求= ( )。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

練習1. △ABC 中，、、，若 G 為重心，G 到、、的距離分別為 x、y、z，則= ( )。

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

練習2. 如右圖，有 10 個相同的正六角形，緊密排列在同一平面上。根據圖中各點的位置，判斷 O 點是下列哪一個三角形的外心？

(A) △ACD

(B) △ABD

(C) △BCD

(D) △ADE

P98

範例研習特區

一、點對直線的投影點、對稱點與點線距

1. 平面上點 A (p, q ) 與直線 L：ax + by = c，可推得：

(1) 投影點為。

(2) 對稱點為。

知 A 到投影點的線段長度，即為 A 到 L 的最近距離，稱此最近距離為點線距，記為 d (A, L)。利用投影點公式可推得 。

2. 平行線間距公式：平面上兩平行直線 與 ，可推得兩線的間距為。只要 L1 上任取一點 P，算出 d ( P , L2 ) 即可。

3. 角平分線方程式：相交兩直線、的角平分線有兩條，為銳角平分線與鈍角平分線，方程式為。

平面上點 A ( p , q ) 與直線 L：ax + by = c，則 A 到 L 的最近距離為 = ( )，稱為「點線距」。

證：過 A 與 L 垂直的直線設為 bx - ay = k，代 A 得 k = bp - aq，則：

為，



則

這題常考

範例1. 點對直線的投影與對稱。點對直線的投影與對稱，若不背公式就只好解聯立了。

1. 設點 A ( 3 , 5 ) 對直線 L 的投影點為 A0 (7 , -1)，求 A 對 L 的對稱點坐標為 ( )，L 的方程式為 ( )。

P99

2. 點 A ( 1 , 4 ) 對直線 L：3x - 2y = 8 的投影點 A0 為 ( )，對稱點為 ( )。

小小叮嚀：

(1) 若代公式則分成四個基本動作，要記的是動作，不是符號。

(2) 求出 A0，就可以心算求。

3. 點 A ( 3 , -2 ) 對直線 L：5x + 4y = p 的投影點為 B (-7 , q )，求數對 ( p, q ) = ( )。

類題1. P ( 6 , -7 ) 對 3x - 4y = -4 的投影點 P0 為 ( )，對稱點為 ( )。

類題2. 點 ( 2 , 1 ) 對 ax + by = -3 的對稱點為 ( 8 , 5 )，求數對 (a , b) = ( )。

類題3. 平面上 A ( 1 , 6 )、B (-1 , a)，若的垂直平分線為 x + 3y + k = 0，則數對 ( a , k ) = ( )。

P100

這題常考

範例2. 利用對稱點求極值。想想：如何求線上動點到兩定點的距離和（或差）的極值？

1. 坐標平面上的兩點 A ( 1 , 5 )、B ( 6 , 7 )，點 P ( x , 0 ) 在 x 軸上移動，則 x = ( ) 時，有最小值為 ( )。

傳授絕招

(1) 好比光由 A 射向 x 軸的 P 再反射到 B。

(2) 先作對稱點，再利用「三角形兩邊之和大於第三邊」得到的最小值。

2. 平面上兩點 A ( 2 , 1 ) 與 B ( 9 , 4 ) 在直線 L：3x - y = 15 的異側，P 在 L 上移動，求 P = ( ) 時，有最大值為 ( )。

小小叮嚀：如果不背公式，這邊光求投影點就會花不少時間。背吧！

類題4. 平面上三點 A ( 2 , 2 )、B ( 6 , 4 )、P ( x , 0 )，則 x = ( ) 時，使△PAB 周長最小為 ( )。

類題5. 平面上兩點 A ( 2 , 1 ) 與 B ( 9 , 2 ) 在直線 L：x - y = -5 的同側，P 為 L 上的動點，則 P = ( ) 時，有最小值為 ( )。

P101

類題6. 兩定點 A ( -4 , 2 ) 與 B ( 7 , -2 )，動點 P ( 0 , k ) 在 y 軸上移動，求 k = ( ) 時，有最大值為 ( )。

這題常考

範例3. 點線距Ⅰ—基本運用。請注意直線方程式的常數項在等號的左或右。

1. 點 P ( -3 , 5 ) 到直線 L：3x - 4y = 6 的最近距離為 ( )。

2. 點 P ( x , y ) 在直線 L：7x + 24y - 9 = 0 上，求的最小值為 ( )。

關鍵想法：

(1) (a,b) 與 ( c , d ) 的距離為。

(2) 看成P ( x , y )到A ( 1 , -2 )的距離。

(3) 注意常數項的位置。

3. 點 ( 1 , -4 ) 到直線 5x + 12y = k 的距離為 5，則 k = ( )。

4. 點 A ( 2 , 5 ) 與 B ( -4 , 3 ) 在直線 L：3x + 2y = -3 的兩側，且交L於P，求= ( )。

類題7. 點 ( 4 , 1 ) 到直線 3x - 4y = 2 的距離為 ( )。

P102

類題8. 點 ( x , y ) 在直線 12x - 5y - 2 = 0 上，求的最小值為 ( )。

類題9. 點 ( 2 , -5 ) 到直線 4x + 3y = k 的距離為 7，k = ( )。

類題10. 已知直線 L 的斜率為 3，且與點 A ( 1 , 2 ) 的距離為 ，則直線 L 的方程式為 ( )。

類題11. 一正方形中心為 ( 2 , 2 ) 且此正方形有一邊在直線 x + 2y - 1 = 0 上，求此正方形的面積為 ( )。

這題常考

範例4. 點線距Ⅱ—平行線間距。由點線距可以推出平行線間距公式，其實不背也行。

1. 求兩平行線 L1：3x - 4y = 4、L2：6x - 8y = 7 之間的距離為 ( )。

傳授絕招：

(1) 直線 ax + by = c1、ax + by = c2，間距為，使用時要小心。

(2) L1上任取一點，到 L2 的距離即為兩平行線的間距。

2. 求與直線 L：3x - 4y = -1 平行且間距為 3 單位的直線方程式為 ( )。

P103

類題12. 求兩平行線 L1：5x - y - 2 = 0、L2：10x - 2y - 5 = 0 之間的距離為 ( )。

類題13. 求與直線 L：4x - 3y = 1 平行且間距為 4 單位的直線方程式為 ( )。

範例 5. 點線距Ⅲ—角平分線。利用「點到線等距」來求角平分線。

求 L1：x - y = 7 與 L2：7x + y = 1 的兩條角平分線方程式為 ( )，其中銳角的角平分線方程式為 ( )。

再講清楚：

(1) 角平分線上的任一點到兩夾邊等距離。

(2) 兩線相交，角平分線有兩條，且互相垂直。

(3) a、b 為實數，則其中一邊加正負號即可。

類題14. 求 L1：3x + 4y = 1 與 L2：x = 3 的兩條角平分線方程式為 ( )，其中鈍角的角平分線方程式為 ( )。

類題15. 求 3x - 4y + 2 = 0 與 4x - 3y - 5 = 0 之銳角平分線的方程式為 ( )。

P104

二、三角形的四心定義及求法

△ABC中，A ( x1 , y1 )、B ( x2 , y2 )、C ( x3 , y3 )，=c，=c，=b，則△ABC的重心、內心、外心、垂心，其定義與基本性質如下：

1. 重心 G：為任兩條中線的交點，重心坐標為，必在三角形的內部。重心 G 把中線分為 2：1 的兩段，並分割三角形成六個等面積的小三角形，如圖一。

2. 內心 I：為任兩條內角平分線的交點，內心坐標為。內心為三角形內切圓的圓心，內心到三邊等距離，必在三角形內部，如圖二。

3. 外心 O：為任兩邊上垂直平分線的交點，可按此定義求出外心坐標。外心為三角形外接圓的圓心，外心到三頂點等距離，如圖三。若為銳角三角形，外心在內部；若為直角三角形，外心在斜邊中點；若為鈍角三角形，外心在外部。

4. 垂心 H：為任兩高所成直線的交點，可按照此定義求出垂心坐標，如圖四。若為銳角三角形，垂心在內部；若為直角三角形，垂心為直角頂點；若為鈍角三角形，垂心在外部。

連連看

定義：三內角平分線交點，三中線交點，三高交點，三邊的中垂線交點·

名稱：重心，內心，外心，垂心

性質：到三頂點等距離，到三邊等距離，到三頂點連成的三角形面積相等，為內切圓圓心，為外接圓圓心，必在三角形的內部，把中線分成2:1的兩段

P105

範例 6. 三角形的重心與內心。重心與內心的坐標並不複雜，不妨記起來用。

1. △ABC的三頂點為 A ( 2 , 4 )、B ( -8 , 6 )、C ( 10 , -2 )，求：

(1) 過 A 的中線方程式為 ( )。

(2) 重心坐標為 ( )。

歸納心得

A ( x1 , y1 )、B ( x2 , y2 )、C ( x3 , y3 )，可推得重心為

2. △ABC，已知 A ( 0 , 0 )、B ( 14 , 0 )、C ( 5 , 12 )，求 △ABC 的內心坐標為 ( )。

傳授絕招

△ABC的 A ( x1 , y1 )、B ( x2 , y2 )、C ( x3 , y3 )，且=c，=a，=b，可推得內心坐標為

類題16. △ABC，若 A ( 3 , -5 )、B ( 3 , 20 )、C ( 27 , 2 )，求 △ABC 的重心坐標為 ( )，內心坐標為 ( )。

類題17. 等腰 △ABC，A ( 0 , 8 )、B ( -6 , 0 )、C ( 6 , 0 )，則其重心、內心、外心、垂心都在y 軸上，求重心坐標為 ( )，內心坐標為 ( )。

P106

這題常考

範例 7. 三角形的垂心與外心。非直角三角形的垂心與外心，必須由定義利用點斜式來求。

1. 直角 △ABC，已知 A ( 1 , 8 )、B ( 3 , 5 )、C ( 12 , 11 )，求 △ABC 的垂心坐標為 ( )，外心坐標為 ( )。

2. △ABC 三頂點為 A ( 3 , 2 )、B ( -1 , 5 )、C ( 1 , 0 )，試求：

(1) 過 C 的高所在直線方程式為 ( )。

(2) 垂心坐標為 ( )。

小小叮嚀：有反問題，注意類題 21。

3. △ABC 三頂點為 A ( 1 , 3 )、B ( - 3 , - 5 )、C ( 7 , - 1 )，點 P 到 A、B、C 的距離都相等，即 P 為 △ABC 的外接圓圓心，稱 P 為外心，試求 P 點坐標為 ( )。

類題18. △ABC 的三邊中點為 P、Q、R，則 △ABC 的外心 O 是 △PQR 的： ( )。

(A) 內心

(B) 外心

(C) 重心

(D) 垂心

(E) 以上皆非

P107

類題19. △ABC 三頂點為 A ( 2 , 1 )、B ( 0 , -3 )、C ( 6 , -5 )，求過 A 的高所在直線方程式為 ( )，過 B 的高所在直線為 ( )，△ABC 的垂心為 ( )。

類題20. △ABC 三頂點為 A ( 3 , -2 )、B ( 1 , 0 )、C ( -5 , -4 )，恰有一點 P 到 A、B、C 等距離，求 P 點坐標為 ( )。

類題21. 已知 △ABC 的兩頂點為 A ( -2 , 3 )、B ( 5 , 4 )，垂心為 ( 1 , 2 )，求 C 坐標為 ( )。

三、二元一次不等式

1. 半平面：ax + by = c 的圖形在坐標平面上為一條直線，此直線把平面分割成兩個半平面，一邊滿足 ax + by > c，另一邊滿足 ax + by < c。

2. 半平面的判斷

(1) 若 a > 0，則 ax + by > c 為右半面，ax + by < c 為左半面。

(2) 若 a < 0，則先把不等式同乘 ( -1 )，讓 x 項係數變為正數後再判斷左右。

(3) 若 a = 0，則移項為 y > k 為上半面，y < k 為下半面。

注意：不等式 ax + by ≥ c 與 ax + by > c 差別在於前者有等號，圖形邊界用實線表示，後者沒有等號，圖形邊界用虛線表示。

3. 聯立不等式：如，聯立表示兩數學式均成立，所以是兩個半平面取重疊的部分，稱為取交集。坐標平面上的多邊形可用一組二元一次聯立不等式來表示。

P108

範例8. 半平面的作圖。先畫直線再取一邊，用歌手的名字「羅大佑」來記規則。

1. 作圖：

(1) x - 2y ≥ 6

(2) -2x + 3y > 12。

2. 平面上點 P ( 3 , 1 )，直線 L：2x + y = 5，請問下列哪些點與 P 位在 L 的同側？

(A) ( 0 , 0 )

(B) ( 1 , 3 )

(C) (2, √3)

(D) ( 100 , -100)

(E) ( -100 , 100)

3. 已知兩點 P ( k + 1 , 3 ) 與 Q ( -1 , k ) 在直線 L：2x - 3y + 4 = 0 的兩側，則 k 的範圍為 ( )。

小小叮嚀：

1. 若題目改為「PQ 與 L 相交」，則 P、Q 可以在 L 上，所以加上等號即可。

2. 若教科書還沒教多項不等式，就用乘積的正負規則來求解。

類題22. 作圖：

(1) 2x + y ≤ 4

(2) -x - 3y < 6。

P109

類題23. 請問右圖適合用下列哪一個不等式來描述？

(A) x + y ≤ -2

(B) x - y ≤ -2

(C) x + y ≥ -2

(D) x - y ≥ -2

(E) x + y < -2

(F) x - y < -2

(G) x + y > -2

(H) x - y > -2

類題24. 若 ax + by # c 的圖形如右圖，請選出正確的選項。 ( )

(A) a > 0

(B) b > 0

(C) c > 0

類題25. 設 A ( 6 , 5 )、B ( 2 , 9 )，若與直線 L：mx - y - 3m + 1 = 0 相交，求 m 的範圍為 ( ) 。

這題常考

範例9. 二元一次聯立不等式Ⅰ。聯立就是取交集，可用來表示多邊形。

1. 作圖：

(1) 。

(2) ( x + y + 1 ) ( x - y - 2 ) > 0。

2. 聯立不等式的圖形為三角形及其內部，圖形如右，其中 L3 平行x 軸，請寫出該聯立不等式為 ( )。

P110

3. 聯立不等式的圖形如右，則：( )。

(A) a > 0

(B) b > 0

(C) c > 0

(D) d > 0

類題26. 作圖：

(1) 

(2) (x+2y-4)(3x-y-6) ≤ 0。

類題27. 四邊形區域（含邊界）如右圖所示，其四邊的直線方程式為x + y = 7、x - y = 3、2x + y = 3、x - 2y = -11，試以聯立不等式組表示為 ( )。

類題28. 平面上三點 A ( 0 , 6 )、B ( -1 , 2 )、C ( 3 , 4 )，若 P ( k , k + 4 ) 為 △ABC 內部的一點，則實數 k 的範圍為 ( ) 。

P111

類題29. 若的圖形如右圖，請選出正確的選項。

(A) a > 0

(B) b > 0

(C) c > 0

(D) d > 0

(E) e > 0

類題30. 的圖形，以下哪一個選項最為合適？

這題常考

範例10. 二元一次聯立不等式 Ⅱ。算格子點、求面積的計算比較繁瑣，要有耐心。

1. 二元一次聯立不等式，求在此區域內共有 ( ) 個格子點（x 坐標與 y 坐標均為整數的點）。

原來如此：

1. 控制 x，找 y 的範圍，然後討論相加，這招叫控制變因。如果 y 的係數較大就討論 y

2. 如果真的作圖去數格子點，那要畫得很精確，不容易數清楚

3. 可以加情境成應用問題，請見類題 32

P112

2. 聯立不等式的圖形在坐標平面上形成一個平行四邊形，請問其面積大小為 ( )。

傳授絕招

(1). p ≤ ax + by ≤ q的圖形是兩平行線中間的區域，所以聯立得圖形為平行四邊形

(2). 取四種最大、最小的極端，即得平行四邊形的四個頂點

(3). 只求兩頂點即可，因為可用點線距求高

3. 已知 1 ≤ a ≤ 5，0 ≤ b ≤ 3，且，求點 ( x , y ) 在平面上所成圖形的聯立不等式為 ( )。

類題31. 求的區域內共有 ( ) 個格子點。

類題32. 已知可樂一杯 18 元，果汁一杯 30 元，小明用現有的 150 元去買飲料，在至少購買 2 杯飲料的情況下，試問小明共有 ( ) 種不同的購買方法。

P113

類題33. 聯立不等式的圖形在坐標平面上形成一個長方形，試求其面積為 ( ) 平方單位。

類題34. 已知 - 1 ≤ a ≤ 3，1 ≤ b ≤ 2，且，求點 ( x , y ) 所成圖形的聯立不等式為 ( )，其圖形為平行四邊形，兩個位於第一象限的頂點坐標為 ( )。

類題35. 設 - 2 ≤ a ≤ 1，- 1 ≤ b ≤ 5，若 x = a + 2b + 1，y = 3a - b + 4，則 ( x , y ) 形成一個平行四邊形，求四個頂點的坐標為 ( )。

範例11. 函數、絕對值的不等式。y = f (x) 的圖形也把平面分成兩半，不等號一樣取半。

1. 聯立不等式所成圖形的面積為 ( )。

重要觀念

1. y ≥ f(x) 的圖形為 y = f(x) 的上方，y ≤ f(x) 的圖形為 y = f(x) 的下方

2. 為 V 字形，頂點在原點，而的頂點在 ( a , b )

P114

2. 作圖：。

類題36. a、b 為常數，則 - 2x ≤ a ≤ y ≤ 3x + b 的圖形以下列哪一選項最為合適？

類題37. 求其圍成的區域面積為 ( )。

類題38. 所成圖形的面積為 ( )。

類題39. 作圖：其圍成的區域面積為 ( )。

歷年大考精選

1. 坐標平面上有兩條平行直線，它們的 x 截距相差 20，y 截距相差 15，則這兩條平行直線的距離為 ( )。

2. 設 a 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式所有點所形成之區域面積為平方單位，則 a= ( )。

3. 地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為 ( ) 公尺。

4. 坐標平面上，圓 C 完全落在四個不等式：x - y ≤ 4、x + y ≤ 18、x - y ≥ -2、x + y ≥ -24 所圍成的區域內，則 C 最大可能面積為 ( )。

5. 設 S 為坐標平面上直線 2x + y = 10 被平行線 x - 2y + 15 = 0 與 x - 2y = 0 所截的線段（含端點）。若直線 3x - y = c 與 S 有交點，則 c 的最小值為 ( )。

素養導向試題

我們把平面上點到直線的最近距離稱為「點線距」，並推導出「點 ( p , q ) 到直線ax + by = c 的最近距離為。請回答下列問題：

一、單選題

1. 坐標平面上，若原點到直線 L 的距離為 1，點 ( 4 , 0 ) 到直線 L 的距離為 2，試求點 ( 30 , 0 ) 到 L 的距離為下列何者？

(A) 7

(B) 7.5

(C) 8

(D) 8.5

(E) 9

二、多選題

2. 平面上有兩點 A、B 且=3，若 A 到直線 L 的距離為 5，B 到直線 L 的距離為 k，則 k 值可以是下列哪些選項？

(A) 1

(B) 3

(C) 5

(D) 7

(E) 9

P116

3. 在學過「點線距公式」之後，計算下列三種情形：

(1) 點 ( 7 , 2 ) 到 3x - 4y = 1 的距離是，為有理數  
(2) 點 ( 4 , 5 ) 到 2x + 3y = 7 的距離是，為無理數

(3) 點 ( 2 , 1 ) 到 2x + 3y = 7 的距離是 0，為有理數

根據以上的觀察，請問下列各選項的推論哪些正確？

(A) 設 p、q、k 為整數，則點 ( p , q ) 到 4x + 3y = k 的距離必為有理數

(B) 設 p、q 為整數，則點 ( p , q ) 到 2x + y = 1 的距離必為無理數

(C) 設 p、q 為正整數，則點 ( p , q ) 到 2x + y = 1 的距離必為無理數

(D) 設 p , q , a , b , c 為整數，a、b 不全為 0，若點 ( p , q ) 到 ax + by = c 的距離是

正的有理數，則為平方數

(E) 可找到整數 p , q , r , s , a , b , c，使得點 ( p , q ) 到 ax + by = c 的距離是，且點( r , s ) 到 ax + by = c 的距離為。

資優挑戰園地

1. 坐標平面上有兩點 A ( 9 , 2 ) 與 B ( 3 , 7 )，在 x 軸上找一點 P，y 軸上找一點 Q，使的和為最小，求此最小值為 ( )。

2. 若 x 為任意實數，求的最小值為 ( )，此時 x = ( )。

P117

3. 設 A ( 1 , 5 )、B ( 1 , -7 )，若與直線 y = mx - 5 交於 P 點，且=7:1，則實數 m= ( ) 。

4. 求過點 P ( -1 , 3 ) 且與兩直線 L1：3x - 4y = 4 及 L2：7x + 24y = 1 夾成等角之直線方程式為 ( ) 。

5. 平面上三直線 2x + y = 12、2x - y = -4 及 x - 2y = 4 圍成一個三角形，求內心坐標為 ( )。，內切圓半徑為 ( )。

歸納心得

由三直線求所圍三角形的

(1) 重心

(2) 外心

(3) 垂心：需求出兩頂點

(4) 內心：不用求頂點

6. 作圖：，求點 ( x , y ) 所成的圖形面積為 ( )。

P118

2-3 圓方程式

我們從國中的「兩點坐標求距離」來推得圓的方程式，首要觀察的重點在於圓心與半徑，並進一步探討圓內、圓外與半圓的情形。

國中複習銜接，國三上

點與圓的關係：點 P 到圓心的距離若大於半徑，則 P 在圓外，反之則在圓內。

圓的性質：

1. 等弧對等圓周角，圓心角是圓周角的 2 倍

2. 直徑的圓周角為 90°

3. 弦切角等於圓周角

1. 如右圖，△ABC 為直角三角形，，半圓的圓心 O 在邊上，它和 AC 相切於 D 點，和相交於 B、E 兩點。已知=10，=8，求圓半徑為 ( )。

(A) 3

(B) 

(C) 4

(D) 5

練習1. 如右圖，梯形 ABCD 為圓 O 的外切四邊形，各邊分別與圓 O 相切於 E、F、G、H 四點，，若=5，=14，圓 O 的半徑為 6，則梯形 ABCD 的面積為何？

(A) 87

(B) 120

(C) 174

(D) 348

練習2. 如右圖，圓與 y 軸相切於 P 點，並且交 x 軸於 A (2 , 0 )、B ( 18 , 0 ) 兩點，求圓心坐標為 ( )。

P119

範例研習特區

一、圓方程式

1. 標準式：坐標平面上，以 ( p , q ) 為圓心、r 為半徑決定一個圓，由距離公式可知圓上任一點 ( x , y ) 滿足二元二次方程式，稱此方程式為圓的標準式，可以直接看出圓心和半徑。

2. 一般式：二元二次方程式的圖形若為平面上的圓，則必 a = c 且 b = 0，故可化成的形式，稱為圓的「一般式」。給一般式，可進一步配方成的形式，並由判斷其圖形。若是圓，則一次項係數減半變號即為圓心坐標。

(1) 若，則為一圓，如。

(2) 若，則退化成一點，如。

(3) 若，則無圖形，如。

同學遇到題目只要配方即可，不用背。

範例1. 圓與畢氏定理。國中教過不少圓的性質，讓我們先用畢氏定理吧！

1. 工匠在窗子外邊想做一個圓弧型的花臺，此花臺在窗口的中央往外伸 72 公分，窗口的寬度是 168 公分，則此圓弧的圓半徑為 ( ) 公分。

小小叮嚀：很多圓的題目都是利用畢氏定理來設計的，請同學動動腦。

類題1. 有一個車輪緊靠臺階，如右圖，臺階的高度為 25 公分，車輪與地面的接觸點距離臺階 35 公分，請問此車輪的直徑為 ( ) 公分。

P120

類題2. 有一圓拱橋，如右圖有 7 根垂直支柱，圓拱寬度=40公尺，拱高=10公尺，相鄰支柱距離 5 公尺，試求：

(1) 圓弧所在之圓的半徑= ( ) 公尺。

(2) 最左邊支柱= ( )公尺。

範例2. 認識圓的方程式。由距離可以推得圓的標準式，乘開就是一般式。

1. 坐標平面上有一個單位圓，圓心為 ( 7 , 4 )，試求圓周上所有點 ( x , y ) 所滿足的關係式為( )。

小小叮嚀：平面上半徑為 1 的圓，稱為「單位圓」

2. 坐標平面上有一圓以點 A ( 3 , - 2 ) 為圓心，點 B ( - 1 , 1 ) 在圓周上，試求此圓方程式為( )。

傳授絕招：學會圓的標準式之後，要能「圖式合一」。乘開就是一般式。

3. 圓方程式的圓心為 ( )，半徑為 ( )。

小小叮嚀：先使 x平方、y平方的係數為 1，才是圓的一般式，再進一步配方。一次項係數減半變號就是圓心坐標。

類題3. 以點 為圓心，半徑為 3 的圓方程式為 ( )。

類題4. 坐標平面上有一圓以點 ( - 4 , 1 ) 為圓心，點 ( 0 , 2 ) 在圓周上，求此圓的方程式為 ( )。

P121

類題5. 圓方程式的圓心為 ( )，半徑為 ( )。

類題6. 已知圓方程式的圓心為(-1, 4 )，試求 a =( )，b =( )，半徑為( )。

這題常考

範例3. 圓方程式的退化。配方可以找出圓心半徑，但有可能退化。

1. 若方程式的圖形為一圓，求數對 ( a , b ) =，圓心為 ( )，半徑為 ( )。

關鍵想法：二元二次方程式為圓，則必 b = 0 且 a = c，且配方後不可以退化。

2. 若二元二次方程式的圖形是一個圓，求實數 a 的範圍為( )。

3. 設 a 為實數，考慮方程式的圖形，若為一點，則 k =( )，此點坐標為( )。

小小叮嚀：圓的一般式配方成標準式時，有可能退化成一點或無圖形。

類題7. 方程式的圖形為圓，求數對 ( p , q ) =( )，圓心為( )，半徑為( )。

P122

類題8. 方程式的圖形為圓，求a=( )，b=( )，圓心為( )，半徑為( )。

類題9. 考慮所表圖形：

(1) 若為一圓，則 k 的範圍為( )。

(2) 若為一點，則 k=( )，此點坐標為( )。

(3) 若無圖形，則 k 的範圍為( )。

範例4. 求圓的方程式 Ⅰ—簡易。理解題意，可以輕易看出圓心半徑。

1. 與共圓心，且過原點的圓方程式為 ( )。

小小叮嚀：如果真的用配方求圓心會浪費很多時間。

2. 已知圓心坐標為 ( 3 , -4 )，且與 x 軸相切，其圓方程式為( )。

3. 圓的半徑為 5，與 x 軸交於兩點，其截距之和為 6，與 y 軸交於兩點，其截距之和為 -8，求圓方程式為( )。

類題10. 平面上有一圓與圓有相同圓心，且過 ( 1 , 1 )，求此圓方程式為( )。

P123

類題11. 圓心 ( -5 , 2 )，與 y 軸相切的圓方程式為( )。

類題12. 平面上有一圓的半徑為 8，與 x 軸的截距和為 2，與 y 軸的截距和為 - 6，求此圓方程式為( )。

類題13. 過 ( 0 , 1 )、( 0 , 5 ) 兩點且與 x 軸相切之圓有兩個，其中圓心在第一象限之圓方程式為( )。

這題常考

範例5. 求圓的方程式 Ⅱ—軌跡。動點軌跡的問題，動手拉拉橡皮筋，發揮想像力吧！

1. 已知兩點 A ( 3 , -1 )、B ( 0 , 5 )，若 P 點滿足，則動點 P 的軌跡方程式為( )。

原來如此：稱此圓為阿波羅尼斯圓，若，則圓會擴大成為 AB 的中垂線。

2. 一定點 A ( 2 , 1 )，B 點則在圓上移動，求的中點所成軌跡方程式為( )。

傳授絕招：所有的點被 A 點吸過去，所有圖形的大小變為一半

3. 點 A ( 1 , 2 ) 在圓的內部，求過 A 的所有弦之中點，所成軌跡的方程式為( )。

關鍵想法：所有的弦中點會落在以為直徑的圓周上。

P124

類題14. 已知 A ( 3 , -4 )、B ( -2 , 6 )，若 P 點滿足，則動點 P 的軌跡方程式為( )。

類題15. 定點 A ( 1 , 2 )，B 點則在圓上移動，求的中點所成軌跡方程式為( )。

類題16. 點 A ( 1 , 0 ) 為圓C：的內部一點，求過 A 所有弦的中點所

成軌跡方程式為( )。

類題17. 設兩直線 x - y + 2 = 0、x - 2y + 5 = 0 的交點為 A，自點 P ( 2 , 0 ) 分別作兩直線的垂線，得垂足為 B、C，試求過 P、A、B、C 四點的圓方程式為( )。

這題常考

範例 6. 求圓的方程式 Ⅲ—假設。更進階的問題，需要假設與推導才行。

1. 三點 A ( 5 , -2 )、B ( 1 , 0 )、C ( -2 , -9 ) 在圓上，此圓即為 △ABC 的外接圓，求其方程式為( )。

再講清楚：若不設圓方程式，也可以做兩條垂直平分線求交點得圓心。若是直角三角形求外接圓，則斜邊中點就是圓心。

2. 已知圓心在 x 軸上，且點 A ( 1 , -4 )、B ( 7 , 2 ) 在圓上，求圓方程式為( )。

P125

3. 已知圓心在直線 x - y + 3 = 0 上，且點 ( 6 , 2 ) 在圓上，並與 x 軸相切，求此圓方程式為( )。

小小叮嚀：

(1) 條件不夠強，有兩解

(2) 圓心坐標為( p , q )，若圓切x 軸，則半徑為，若圓切 y 軸，則半徑為。

類題18. 三直線 x - y = 0、x + y = 0、x - 2y = 6 所圍成的三角形，試求其外接圓方程式為( )。

類題19. 圓心在 y 軸上，且點 ( 7 , 1 )、( -1 , 3 ) 在圓上，求圓方程式為( )。

類題20. 坐標平面上有一圓過 ( 0 , -2 ) 與 ( 4 , 0 ) 兩點，圓心在 x + y = 0 上，求圓方程式為( )。

類題21. 求過 ( 5 , 1 ) 與 ( 2 , 4 ) 兩點，而半徑為 5 的圓方程式為( )。

P126

類題22. 求平面上過點 ( 1 , 8 ) 且與 x 軸、y 軸都相切的圓方程式為( )。

這題常考

範例7. 圓上到點線的距離。配合圖形來思考，動動腦。

1. 已知點 P ( a , b ) 為圓 C：的動點，試求：

(1) 的最大值為( )。

(2) 的最小值為( )。

再講清楚：請把看成「( a , b )到( 0 , 0 )的兩點距離」，把看成「( a , b ) 到 ( -2, 1 ) 的距離平方」

2. 在圓 C：上，共有個點到點 P ( 5 , 9 ) 的距離恰為整數。

傳授絕招：要訣在於估計根號的大小，並用一組同心圓來看交點數。

類題23. 點 P ( x , y ) 在圓 C：上，求的最大值為 ( )，的最小值為( )。

類題24. 圓有個點 ( a , b ) 使得的值恰為整數。

P127

類題25. 圓上有 ( ) 個點到 x 軸的距離恰為整數。

類題26. 設點 P 在圓 C1：上移動，點 Q 在圓 C2：上移動，點 R 在 x 軸上移動，則的最小值為( )。

2. 圓內、圓外與半圓

1. 已知圓方程式，則：

(1) 點 ( x , y ) 在圓內 ⇔ 點 ( x , y ) 滿足。

(2) 點 ( x , y ) 在圓外 ⇔ 點 ( x , y ) 滿足。

2. 把圓方程式移項開根號，可得

(1) 為上半圓。

(2) 下半圓。

(3) 右半圓。

(4) 為左半圓。

範例8. 圓內與圓外。圓方程式改成不等式，就是圓內圓外。

1. 點 P ( 3 , 2 ) 與圓 C：，試問：

(1) 若 P 點在圓 C 的內部，求 k 的範圍為( )。

(2) 若 P 點在圓 C 的外部，求 k 的範圍為( )。

再講清楚：若 P 在圓內可不考慮圓的退化，若 P 在圓外就可能退化成一點或無圖形。

P128

2. 已知平面上點 A ( 3 , 7 )、B ( -1 , 5 )，若 A 點在圓 C 的內部且 B 點在圓 C 的外部，求圓心坐標 ( x , y ) 所滿足的二元一次不等式為( )。

類題27. P ( 1 , 3 ) 在圓 C：的外部，求 k 的範圍為( )。

類題28. 點 A ( 1 , 5 ) 在圓 C：外部，點 B ( 0 , 3 ) 在圓 C 的內部，求 k 的範圍為( )。

類題29. 平面上滿足的圖形面積為( )。

範例9. 圓方程式移項開根號。我們來畫上、下、右、左四種半圓。要用圓規喔！

1. 分別作下列各方程式的圖形：

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

P129

2. 求平面上滿足的圖形區域面積為( )。

複習一下：y ≥ f(x) 為 y = f(x) 的上方區域；y ≤ f(x) 為 y = f(x) 的下方區域。

類題30. 方程式的圖形為的：( )。

(A) 上半部

(B) 下半部

(C) 左半部

(D) 右半部

類題31. 平面上滿足的點 ( x , y ) 所成圖形面積為( )。

類題32. 平面上滿足的點 ( x , y ) 所成圖形面積為( )。

歷年大考精選

1. 一圓的方程式為，考慮此圓任意兩條互相垂直切線的交點，所有這種交點所成圖形的方程式為( )。

2. 在坐標平面上，下列五組條件中，哪幾組恰可決定一圓？( )。

(A) 過三點 ( 1 , -3 )、( 2 , 6 )、( 4 , 24 )

(B) 以 ( 1 , 0 ) 與 ( 3 , 4 ) 為一直徑的兩端點

(C) 過四點 ( 1 , 0 )、( -1 , 0 )、( 0 , 1 ) 與 ( 0 , -1 )

(D) 圓心為 ( -1 , 2 ) 且與 x 軸、y 軸都相切

(E) 與直線 x + y - 1 = 0、x 軸、y 軸都相切

3. 在坐標平面上，以 ( 1 , 1 )、( - 1 , 1 )、( - 1 , - 1 ) 及 ( 1 , - 1 ) 等四個點為頂點的

正方形，與圓有幾個交點？( )。

P140

設 C 為坐標平面上的圓，點 ( 0 , 0 ) 在 C 的外部且點 ( 2 , 6 ) 在 C 的內部。請選出正確的選項。( )。

(A) C 的圓心不可能在第二象限

(B) C 的圓心可能在第三象限且此時 C 的半徑必定大於 10

(C) C 的圓心可能在第一象限且此時 C 的半徑必定小於 10

(D) C 的圓心可能在 x 軸上且此時圓心的 x 坐標必定小於 10

(E) C 的圓心可能在第四象限且此時 C 的半徑必定大於 10

5. 某高中已有一個長 90 公尺、寬 60 公尺的足球練習場。若想要在足球練習場的外圍鋪設內圈總長度為 400 公尺的跑道，跑道規格為左右兩側各是直徑相同的半圓，而中間是上下各一條的直線跑道，直線跑道與足球練習場的長邊平行（ 如示意圖）。則圖中一條直線跑道 AB 長度的最大可能整數值為 ( ) 公尺。

素養導向試題

方程式若沒退化，則圖形為圓，由 a、b 決定圓心位置，a、b、c 決定半徑大小。請回答下列問題：

一、填充題

1. 如右圖，圓通過 ( 0 , 0 )，圓心在第一象限，此圓在第二象限內的弧長為 2π，在第四象限內的弧長為 4π，求序組 (a,b,c )= ( )。

P131

二、非選題

2至4題為題組

2. 如右圖，設原點落在圓 C 的內部，圓心在第一象限，則圓周會落在四個象限內，設在第 k 象限內的圓弧長度為 Lk，1 ≤ k ≤ 4 且k為整數。請利用圓的對稱特性，找出 L1、L2、L3、L4 的關係。

3. 承2，若圓 C 滿足 L2 < L3 < L4，請問 C 的圓心落在第幾象限？

4. 承2，請問圓 C 有沒有可能出現 L1 < L2 < L3 < L4 的情形？請說明原因。

5至6題為題組

5. 如右圖，設原點落在圓 C 的內部，圓心 ( p , q ) 在第一象限，則圓被坐標軸切成四塊。設在第 k 象限內的面積為 Ak，1≤ k ≤ 4且 k 為整數。請利用圓的對稱特性，找出 A1、A2、A3、A4 與 p、q 的關係式。

6. 設圓 C 的圓心為 ( 5 , 12 )，半徑大於 13，圓內區域在第 k 象限內的面積為 Ak，試求A1 - A2 + A3 - A4 之值。

P132

1. P 在上，A ( 4 , 5 )，B ( 0 , - 1 )，求 TPAB 的重心軌跡方程式為( )。

2. 平面上有一圓，圓心為 O ( -3 , 5 )，點 A、B、C 在圓上，的中點為 P ( -7 , 8 )，的中點為 Q ( 0 , 4 )，求圓方程式為( )。

3. 作圖，並求其面積為( )。

P133

2-4 圓與直線的關係

平面上圓與直線可以交於兩點、相切、不相交，關鍵在於比較「圓心到直線的距離」與「圓半徑」的大小。尤其「相切」的情形是本單元的重點，有許多題型請同學熟習。

國中複習銜接，國三上

直線與圓的關係

(1) 直線與圓可交於兩點、相切、相離，由圓心到直線的距離與半徑相比較來決定

(2) 自圓外一點可用直尺、圓規作兩條切線，兩條切線段長必相等

1. 如右圖，圓 O 的半徑為 10 公分，P 為圓外一點，與分別切圓 O 於 A、B 兩點，且 =24公分，則=( )。

(A) 26

(B) 

(C) 

(D) 52

練習1. 如圖，切圓 O 於 A 點，交圓 O 於 B 點，若=5，=3，則= ( )。

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

練習2. 如圖，、為圓 O 的兩條切線，且與交於 D，與圓 O 交於 C，其中，若=10cm，=5cm，求= ( )。

(A) 6

(B) 5

(C) 4

(D) 3

範例研習特區

圓與直線的關係

1. 圓與直線的三種關係

(1) 交於兩點：圓心到直線的距離 d 會小於半徑 r，如右圖，可用畢氏定理求弦長。解圓方程式與直線方程式的聯立可求得交點 M、N 的坐標，且二次方程的判別式必大於 0。

(2) 相切：圓心到直線的距離 d 會等於半徑 r。如右圖。解圓方程式與直線方程式的聯立可求得切點 P 的坐標，且二次方程的判別式會等於 0。

(3) 不相交：圓心到直線的距離 d 會大於半徑 r。如右圖。解圓方程式與直線方程式的聯立會無解，即二次方程的判別式會小於 0。

2. 要判斷圓與直線的關係，常用點線距公式求圓心到直線的距離，也可用聯立方程的判別式來判斷，採用何種解法視題目而定。

這題常考

範例1. 圓的割線與弦長。講到圓與直線，最先想到的就是點線距。

1. 直線 3x - 4y = - 11 與圓交於兩點 A、B，求=( )。

複習一下：點 ( p , q ) 到直線 ax + by = c 的最近距離為。

2. 若圓被直線 L：3x + 2y = k 截出的弦長為 10，求 k = ( )。

類題1. 直線 x + y = 3 與交於 A、B 兩點，求=( )。

類題2. 直線 y = mx - m 截圓的弦長為，求 m = ( )。

P135

這題常考

範例2. 點線距與判別式的使用。若不易看出圓心半徑，也可以聯立看判別式來解。

1. 圓 C：與直線 L：3x + 4y = k，請問：

(1) 若相交於兩點，求 k 的範圍為( )。

(2) 若相切，求 k = ( )。

2. 直線 L：x + y = k 與圓 C：請問：

(1) 若不相交，求 k 的範圍為( )。

(2) 若相切，求 k = ( )。

再講清楚

1. 因為圓不易配方，所以不適用點線距來判定 k 的範圍

2. 若教科書還沒教多項不等式，就用乘積的正負規則來求解即可

3. 直線x + y = 3與圓相交於兩點，求交點坐標為( )。

類題3. 直線 L：ax - y + a + 1 = 0 與圓 C：，求：

(1) 若交於相異兩點，則 a 的範圍為( )。

(2) 若相切，則 a= ( )。

(3) 若不相交，則 a 的範圍為( )。

P136

類題4. 若直線 2x + y = k 與圓相交於兩點，試求 k 的範圍為( )。

類題5. 若直線 kx + y = 1 與圓，求 k= ( )。

類題6. 若直線 L：x + 2y = 1 與圓 C：相交於兩點，求交點坐標為( )。

二、作圓的切線

1. 已知斜率：以斜率 m 作圓 的切線有兩條，方程式為

2. 已知切點：圓上一點 P ( a , b )，過 P 可作一條圓的切線。

(1) 若圓為，此切線為。

(2) 若圓為，此切線為。

3. 切點弦方程式：自圓外一點 P ( a , b ) 作圓的兩切線，切點為M、N，則兩切點的連線方程式為。

注意：2. 和 3. 的公式完全相同，請同學記起來！

4. 過圓外一點：P ( a , b ) 為圓外一點，設過 P 作圓的切線為 L：y - b = m ( x - a )，利用圓心到 L 的距離等於半徑，移項平方得到 m 的方程式來求得 m。如果只得一個m 值表示其中有一條切線為鉛直線。

5. 切線段長：過圓 C：外一點 P ( a , b ) 作兩切線，切點為 M 與N，則切線段長，即一般式的 x 用 a 代，y 用 b 代，再開根號即得。

P137

圓的切線公式

1. 點 P ( a , b ) 在圓上，過 P 點可作一條圓的切線，方程式為若圓為一般式，則，再代數字，請詳見範例。若不記公式就用點斜式推導。

證明：

已知…(1)

圓心 ( h , k ) 與 P ( a , b ) 連線的斜率為，倒數變號得，則切線方程式用點斜式寫出，即…(2)

(1)+(2)，得

即

2. 以斜率 m 作圓的切線方程式為

證明：

設切線為y-k=m(x-h)+a，帶入圓得

即

因為相切，所以判別式

得，得

這題常考

範例3. 已知切點、斜率求切線。代公式當然比較快，可以節省很多時間。

1. 過圓上的點 ( 1 , 3 ) 所作的切線方程式為( )。

再講清楚：若不代公式，用點斜式來求也很快。

2. 過圓 上的點 ( 2 , 3 ) 所作的切線方程式為( )。

原來如此：不代公式的話就要先配方求圓心，萬一數字很醜就慘了，見類題 9。

3. 已知圓 C：，以為切線斜率所作切線方程式為( )。

再講清楚：其實就是過圓心的直線向上下平移變成切線。

P138

類題7. 圓上有一點 P ( 1 , - 2 )，求過 P 點所作圓的切線方程式為( )。

類題8. 圓上有一點 P ( 3 , 1 )，求過 P 點所作圓的切線方程式為( )。

類題9. 圓有一點，求過 P 點所作圓的切線方程式為( )。

類題10. 求與圓相切，且斜率為 4 的切線方程式為( )。

類題11. 求與直線 2x - 3y = 7 垂直，且與圓相切的直線方程式為( )。

這題常考

範例4. 切點與切線的反問題。這種稍微複雜的反問題超受數學老師喜愛！

若直線2x - y + a = 0 與圓相切於點 ( 4 , 1 )，試求序組 ( a , b , c ) = ( )。

小小叮嚀：如果不代切線公式，利用代點及斜率也可一步一步來求 a、b、c。

P139

類題12. 若直線 x - 2y = 3c 與圓切於 ( 5 , 1 )，則序組 ( a , b , c ) = ( )。

類題13. 直線 L 的斜率為，且與圓相切，切點為 ( - 1 ,7 )，試求a= ( )，b=( )。

這題常考

範例5. 圓外一點作兩切線。先用點斜式假設，再用點線距來求斜率。請熟練這個過程。

1. 過圓 C：外一點 P ( 8 , - 1 ) 作圓 C 的兩條切線，求切線方程式為( )。

複習一下：點斜式：過點 ( p , q ) 且斜率為 m的直線方程式為 y - q = m ( x - p )。

2. 過圓 C：外一點 P ( 2 , 9 ) 作圓 C 的兩條切線，求切線方程式為 ( )，若在 P 點有光源向圓照射，投射在 x 軸的影長為( )。

再講清楚：

1. 過圓外一點作切線必有兩條

2. 若 m 的方程式可消去二次式，只能解出一個 m，則另一切線必為鉛直線。

P140

類題14. 過 P ( 5 , 1 ) 作圓的切線方程式為( )。

類題 15. 圓 C：，過圓外一點 P ( 3 , 2 ) 作兩切線，求兩切線的斜率為( )。

類題16. 坐標平面上 ( 7 , 5 ) 處有一光源，將圓投影到 x 軸的影長為( )。

這題常考

範例6. 圓外一點的切線段問題。圓外一點可作兩條切線，順便複習一些國中的性質。

自 P ( 5 , 3 ) 作圓的切線切圓於 M 與 N，則：

(1) 切線段長== ( )。

加強演練

切線段長可以心算：

1. 自原點作的切線段長為( )。

2. 自原點作的切線段長為( )。

(2) 自 P 作圓割線交圓於 A、B，則= ( )。

複習一下

切割線性質：

P141

(3) 弦長= ( )。

小小叮嚀

三角形面積=

斜邊上的高 h=

(4) △PMN 的外接圓方程式為( )。

原來如此：以為直徑的圓會通過 P、M、N，所以求中點即為圓心，即直徑。

(5) 弦所在直線方程式為( )。

再講清楚：兩圓方程式相減，削去二次項後所得的一次方程式，即為兩圓的交點連線。這是下個範例的觀念。

類題17. 過點 P ( 5 , 2 )，作圓的兩條切線，切圓於 A 與 B，則：

(1) 切線段長為( )。

(2) 弦長= ( )。

類題18. 過點 P ( 1 , 2 ) 作的兩切線，切線段長為( )，若過 P的直線與圓交於 A、B 兩點，求= ( )。

P142

類題19. 過點 P ( 4 , 3 )，作的兩條切線，切圓於 A、B，則△PAB 的外接圓方程式為( )，方程式為( )，並求 A、B 的坐標為 ( )。

三、圓系方程式

1. 根軸：兩圓相交於兩點 M 與 N，則兩圓方程式相減即得的方程式，為，稱為根軸。

2. 圓與直線做圓系方程：圓 C：與直線 L：ax + by = c 交於兩點 P 與 Q，則過兩交點 P、Q 的圓有無限多個，表為，動圓會隨 k 值而變動，而且恆過 P 與 Q。

3. 圓與圓做圓系方程：兩圓交於兩點，則過兩交點的圓有無限多個，表為。

4. 圓和圓所成的圓系不易配方，因此我們解題時，應先把兩圓相減求出兩交點的直線方程式，由其中一圓（選數字較簡單者）和此直線做圓系方程式，較為便利。

注意：看到「圓與…交於兩點，求過此兩點且…的圓方程式」就想到圓系的做法。

範例7. 兩圓的交點連線。兩圓方程相減即得交點連線，稱為「根軸」。

1. 若兩圓 C1：與C2：的交點為 A、B，求的直線方程式為 ( )，，並求公共弦 AB 的長為 ( )。

再講清楚：若想求 A、B 坐標，再把與其中一圓聯立即可，如類題 19。

P143

2. 若兩圓C1：與C2：相交於 A、B 兩點，且方程式為 x - 2y = 2，求 a =( )，b=( )。

類題20. 兩圓C1：與C2：的交點為 A、B，求的直線方程式為( )。

類題21. 兩圓C1：與 C2：相交於 A、B，若方程式為 3x - y + 2 = 0，求 a =( ) ，b=( )。

類題22. 如右圖，將圓上的劣弧 AB 沿著弦對折，此對折後的圓弧與直線 y = -1 相切於點 P ( - 2 , -1 )，若弧 APB 所在的圓方程式為，則序組( h , k , a ) =( )，方程式為( )。

範例8. 圓系求圓方程。這是相當特殊的手法，可以不經圓心半徑來求圓方程。

1. 無論實數 k 為何，若圓系方程式恆過兩定點A 與 B，求方程式為( )。

小小叮嚀：

(1) 圓系方程式就是變動的圓，圓心、半徑都會隨著 k 而變動

(2) 本題也可用 k = 0 與 k = 1 代入得到兩個不同的圓，相減即為。

P144

2. 求過圓與直線 3x - y = 4 的兩個交點，且過 ( - 2 , 1 ) 的圓方程式為( )。

傳授絕招

(1) 記法：C + k L = 0

(2) 想像 k 在變動，可以得到無限多個圓，但必通過兩個定點，圖形如下。

3. 兩圓 C1：與 C2：交於 A、B 兩點，求過 A、B 且圓心在 2x + y = 5 上的圓方程式為( )。

原來如此：圓也可以和圓做圓系，但不容易配方，宜先求兩圓的交點連線，改用圓與直線做圓系，這樣子才方便。

類題23. 若圓，無論 k 為何，恆過兩定點 A、B，求方程式為( )。

類題24. k 為任意實數，圓恆過兩定點 P、Q，則方程式為( )。

類題25. 設圓與直線 x - y = 1 交於 A、B 兩點，另有一點 C ( 2 , 3 )，求 △ABC 的外接圓方程式為( )。

類題26. 兩圓 C1：與 C2：交於 A、B 兩點，求過 A、B 且圓心在直線 x - y = 6 上的圓方程式為( )。

歷年大考精選

1. 坐標平面上，一圓與直線 x - y = 1 以及直線 x - y = 5 所截的弦長皆為 14，則此圓的面積為( )。

2. 坐標平面上有一以原點 O 為圓心的圓 C，交直線 x - y + 1 = 0 於 Q、R 兩點。已知圓

C 上有一點 P 使得 △PQR 為一正三角形。請選出正確的選項。( )

(A) O 點與 P 點皆在 QR 的中垂線上

(B) P 點在第三象限

(C) QR 的中點坐標為 

(D) 圓 C 的方程式為 

(E) 直線 x - y - 1 = 0 為圓 C 在 P 點的切線

3. 坐標平面上兩圖形 C1、C2 的方程式分別為：C1：、C2：。請問 C1、C2 共有幾個交點？( )

(A) 1 個

(B) 2 個

(C) 3 個

(D) 4 個

(E) 0 個

4. 平面上兩點 A、B 之距離為 5，以 A 為圓心作一半徑為 r（0 < r < 5）的圓 C，過B 作圓 C 的切線，切點（之一）為 P。當 r 變動時，△PAB 的面積最大可能值為( )。

5. 坐標平面上，已知圓 C 通過點 P ( 0 , -5 )，其圓心在 x = 2 上。若圓 C 截 x 軸所成之弦長為 6，則其半徑為( )。

6. 點 A(1,0) 在單位圓 C：上。試問：C 上除了 A 點以外，還有幾個點到直線 L：y = 2x 的距離，等於 A 點到 L 的距離？( )

(A) 1 個

(B) 2 個

(C) 3 個

(D) 4 個

(E) 0 個

P146

素養導向試題

圓的割線與切線在國中就有介紹過，到高中用「 點線距」及「 畢氏定理」可以進

行細部的計算。請回答下列問題：

一、多選題

1. 坐標平面上有一圓 C，被直線 x = k 所截的弦長記為 ak，考慮數列 a1 , a2 , … , a10，已知 a3 = 4，a4 = 6，請問下列各選項哪些正確？

(A) 圓 C 的半徑是一個正整數

(B) 圓 C 之圓心的橫坐標是一個正整數

(C) a5 < a7

(D) 數列 a1 , a2 , … , a10 的最大值是 a6

(E) 數列 a1 , a2 , … , a10 之中，總共有兩項是 0

2. 圓 C：，其中 p、q、r 為正整數且 p > q > r。設 k 為正整數，若圓 C 被鉛直線 x = k 所截的弦長記為 ak，圓C 被水平直線 y = k 所截的弦長記為 bk，請問下列各選項的推論哪些正確？

(A) a1 = b1

(B) ap = bq

(C) 

(D) 數列〈ak〉與〈bk〉的最大值均為 r

(E) 數列〈ak〉共有 m 項不為 0，數列〈bk〉共有 n 項不為 0，則 m = n

P147

二、非選題

3至4題為題組

3. 坐標平面上，點 A ( 3 , 5 )、B ( 7 , 5 ) 連成水平線段 ，點光源位在 P ( k , 15 ) 照向，請問投射在 x 軸上的影長為何？當 k 值改變，對影長的影響為何？

4. 如右圖，點光源位在天花板的 P ( 3 , 10 ) 位置，照向一圓後，在地板 x 軸上留下影子。若在天花板的 P 點之右方再找一點 Q ( k , 10 )，設置另一個點光源，希望兩個光源投射在 x 軸的影子完全不重疊，請問 k 的範圍為何？

資優挑戰園地

1. 過圓外一點 ( 3 , 1 ) 作兩切線，求兩個切點的坐標為( )。

2. 已知與直線 L：y = x + k 有相異兩交點，則 k 的範圍為( )。

3. 若點 P 為圓 C：外一點，若過 P 對 C 作兩條切線，兩切點連線為x-4y = -3，求 P 坐標為( )。